МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ РЕСПУБЛИКИ ТАТАРСТАН
государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
«Казанский техникум народных художественных промыслов»

УТВЕРЖДАЮ
Директор ГАПОУ «Казанский техникум
народных художественных промыслов»
_____________ Р.К. Саубанова
«10» 05 2023г.

КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ
В ФОРМЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ЗАЧЕТА

по общепрофессиональной дисциплине профессионального цикла

ОП.10 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

по специальности:
09.02.07 Информационные системы и программирование
квалификации: – разработчик веб и мультимедийных приложений

Согласовано
Заместитель директора по УПР
_____________/М.Р. Гаязова/
«10» 05 2023г.

Рассмотрено на заседании ПЦК
Протокол № 8
от «25» 04 2023г.
Председатель ПЦК
_____________/З.Б. Тагирова/

2023 г.

1.1. **Общие положения**

Контрольно-оценочные средства (КОС) предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины ОП.10 «Численные методы»..

В соответствии с учебным планом, дисциплина ОП.10 «Численные методы» изучается в течение одного семестра. Формой промежуточной аттестации по окончании всего курса является дифференциальный зачет.

КОС разработаны на основании программы подготовки специалиста среднего звена по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Результаты освоения дисциплины, подлежащие проверке

В ходе аттестации по дисциплине осуществляется проверка следующих умений, знаний и формирования общих и профессиональных компетенций.

Результаты обучения (умения, знания)	**Основные показатели оценки результатов**
У.1 Использовать основные численные методы решения математических задач.	Устный опрос, тестирование, решение задач
У.2 Выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи.	Устный опрос, тестирование, решение задач
У.3 Давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения.	Устный опрос, тестирование, решение задач
У.4 Разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата.	Устный опрос, тестирование, решение задач
З.1 Методы хранения чисел в памяти электронно-вычислительной машины (далее – ЭВМ) и действия над ними, оценку точности вычислений.	Устный опрос, тестирование, выполнение индивидуальных заданий различной сложности.
З.2 Методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.	Оценка ответов в ходе эвристической беседы, тестирование.

Код	Наименование компетенций
ОК 1.	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.
ОК 2.	Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.
ОК 4.	Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.
ОК 5.	Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.
ОК 9.	Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК 10.	Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языке.
ПК 1.1.	Формировать алгоритмы разработки программных модулей в соответствии с техническим заданием.
ПК 1.2.	Разрабатывать программные модули в соответствии с техническим заданием.
ПК 1.5.	Осуществлять рефакторинг и оптимизацию программного кода.
ПК 3.4.	Проводить сравнительный анализ программных продуктов и средств разработки, с целью выявления наилучшего решения согласно критериям, определенным техническим заданием.
ПК 5.1.	Собирать исходные данные для разработки проектной документации на информационную систему.
ПК 9.2.	Разрабатывать веб-приложение в соответствии с техническим заданием.
ПК 10.1.	Обрабатывать статический и динамический информационный контент.
ПК 11.1.	Осуществлять сбор, обработку и анализ информации для проектирования баз данных.

Планируемые личностные результаты:

ЛР 13 Принимающий осознанный выбор профессии и возможностей реализации собственных жизненных планов; проявляющий отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем

ЛР 14 Демонстрирующий готовность и способность к продолжению образования, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности

ЛР 15 Проявляющий способность самостоятельно реализовать свой потенциал в профессиональной деятельности

Оценка достижения обучающимися личностных результатов

Оценка личностных результатов осуществляется обучающимися в результате самооценки, на основе представленных критериев. Лист самооценки заполняется студентами завершающего курса жх и вкладывается в портфолио.

Код личностных результатов реализации программы воспитания	Формируемые ценностные отношения к ценностям	Формы или критерии оценки личностных результатов обучающихся
ЛР 13	отношение к Профессии и профессиональной деятельности	–участие в исследовательской и проектной работе; –участие в конкурсах профессионального мастерства, олимпиадах по профессии; –участие в командных проектах конкурсов профессионального мастерства
ЛР 14	отношение к Знаниям и личному развитию	–ответственность за результат учебной деятельности и подготовки к профессиональной деятельности
ЛР 15	отношение к Самореализации	–самооценка собственного продвижения, личностного развития; –положительная динамика в организации собственной учебной деятельности по результатам самооценки, самоанализа и коррекции ее результатов.

1.2 Критерии оценки знаний и умений

Билет на дифференцированный зачет состоит из двух вопросов: теоритического вопроса и практического задания. На выполнение работы отводится 60 минут. Всего 26 вариантов заданий.

Оценка «отлично» ставится при полном ответе на билет. Возможны одна – две неточности при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, которые студент легко исправил по замечанию преподавателя.

Оценка «хорошо» ставится, если студент ответил на весь билет с небольшими ошибками или недочётами, легко исправленные по замечанию преподавателя.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса, допущены ошибки в определении понятий; студент не справился с применением теории в новой ситуации при выполнении практического задания.

Оценка «не удовлетворительно» ставится, если не раскрыто основное содержание учебного материала; допущены ошибки в определении понятий, при использовании математической терминологии, в рисунках, чертежах или графиках, в выкладках, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов преподавателя.

Шкала оценки образовательных достижений

Процент результативности (правильных ответов)	Оценка уровня подготовки	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

2 СТРУКТУРА И ПЕРЕЧЕНЬ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Вопросы и задания	**Код**
2.1 Перечень теоретических вопросов к зачету	
1. Приближенные числа и действия над ними. 2. Приближенные значения. Абсолютная и относительная погрешность. Верные и значащие цифры. 3. Постановка задачи локализации корней 4. Учет погрешностей вычислений по заданной формуле. Вычисления по правилам подсчета цифр. 5. Вычисления со строгим учетом предельных абсолютных погрешностей. 6. Отделение и уточнение корня уравнения методом половинного деления. 7. Метод простой итерации для решения уравнений. 8. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) численными методами. Метод Гаусса. 9. Метод простой итерации для системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). 10. Метод Зейделя для решения СЛАУ 11. Решение систем линейных уравнений приближёнными методами 12. Интерполяционный многочлен Лагранжа. 13. Первая интерполяционная формула Ньютона. 14. Вторая интерполяционная формула Ньютона. 15. Экстраполирование функций. 16. Численное интегрирование. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса. 17. Численное интегрирование. Формулы трапеций. 18. Численное интегрирование. Формула Симпсона. 19. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. 20. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Рунге-Кутта. 21. Численное решение задач оптимизации. 22. Поиск минимума функции одной переменной. 23. Поиск минимума функции многих переменных.	У1-У4, З1,З2

2.2 Типовые тестовые задания

Уровень 1 – проверка базовых понятий и простейших действий по образцу.

Уровень 2 – применение формул и алгоритмов в типовых ситуациях.

Уровень 3 – комплексные задачи с выбором метода, оценкой точности или программированием.

Уровень 1. Очень слабый (базовый)

1.1 Что называется абсолютной погрешностью приближённого числа? Приведите формулу.

Компетенции. ОК 01, ОК 02; З1.

Ответ. Абсолютная погрешность – модуль разности между точным значением *x* и его приближением *a*: $\Delta = |x - a|$.

1.2 Округлите число 3,14159 до сотых. Найдите абсолютную погрешность округления.

Компетенции. ОК 01, ПК 1.1; У1, З1.

Ответ. 3,14; $\Delta = |3{,}14159 - 3{,}14| = 0{,}00159$.

1.3 Запишите формулу относительной погрешности через абсолютную погрешность и приближённое значение.

Компетенции. ОК 05; З1.

Ответ. $\delta = \Delta / |a|$ (в долях) или $\delta\% = (\Delta / |a|)\cdot 100\%$.

1.4 Какие цифры называются верными в строгом смысле?

Компетенции. ОК 09, ПК 5.1; З1.

Ответ. Цифра называется верной в строгом смысле, если абсолютная погрешность числа не превышает половины единицы разряда этой цифры.

1.5 Сформулируйте условие окончания итерационного процесса при уточнении корня методом половинного деления.

Компетенции. ОК 04; З2.

Ответ. Длина текущего отрезка $[a,b]$ становится меньше заданной точности ε: $|b - a| < \varepsilon$.

1.6 Дано уравнение $x^2 - 2 = 0$. Укажите отрезок, на котором отделён корень (один из возможных).

Компетенции. ОК 01, ПК 1.1; У2.

Ответ. $[1, 2]$ (т.к. $f(1)= -1$, $f(2)=2$, знаки разные).

1.7 Запишите условие сходимости метода простой итерации для уравнения $x = \varphi(x)$.

Компетенции. ОК 02; У1, З2.

Ответ. $|\varphi'(x)| < 1$ в окрестности корня.

1.8 Что такое диагональное преобладание в матрице системы линейных уравнений?

Компетенции. ОК 10, ПК 11.1; З2.

Ответ. Для каждой строки модуль диагонального элемента больше суммы модулей всех остальных элементов этой строки.

1.9 Запишите формулу интерполяционного многочлена Лагранжа для двух узлов (линейная интерполяция).

Компетенции. ОК 09; У3.

Ответ. L1(x)=y0x−x1x0−x1+y1x−x0x1−x0𝐿1(𝑥)=𝑦0𝑥0−𝑥1𝑥−𝑥1+𝑦1𝑥1−𝑥0 𝑥−𝑥0.

1.10 Какая формула численного интегрирования называется формулой трапеций? Напишите её для одного шага.

Компетенции. ОК 02, ПК 1.2; У1.

Ответ. ∫abf(x)dx≈b−a2(f(a)+f(b))∫𝑎𝑏𝑓(𝑥)𝑑𝑥≈2𝑏−𝑎(𝑓(𝑎)+𝑓(𝑏)).

1.11 В чём суть метода Эйлера решения задачи Коши для ОДУ?

Компетенции. ОК 04; З2.

Ответ. Приближённое решение строится по формуле yn+1=yn+h·f(xn,yn)𝑦𝑛+1=𝑦𝑛+ℎ·𝑓(𝑥𝑛,𝑦𝑛), где *h* – шаг.

1.12 Для функции f(x)=x² вычислите приближённое значение производной в точке x=2 по формуле f(2+h)−f(2)hℎ𝑓(2+ℎ)−𝑓(2) при h=0,1.

Компетенции. ОК 01, ПК 1.5; У1, З2.

Ответ. (4,41 – 4)/0,1 = 4,1.

1.13 Укажите основное отличие метода Симпсона от метода трапеций.

Компетенции. ОК 05; З2.

Ответ. Метод Симпсона использует квадратичную параболу на каждом отрезке (или на сдвоенных отрезках) и имеет более высокий порядок точности.

1.14 Что такое шаг интегрирования при численном решении дифференциального уравнения?

Компетенции. ОК 09; З2.

Ответ. Расстояние между соседними узлами сетки, на которой ищется приближённое решение.

1.15 Запишите условие остановки поиска минимума функции методом золотого сечения.

Компетенции. ОК 02, ПК 3.4; У2.

Ответ. Когда длина интервала неопределённости становится меньше заданной точности ε.

Уровень 2.

2.1 Вычислите абсолютную и относительную погрешности произведения чисел a = 5,3 ± 0,05 и b = 2,1 ± 0,02 (границы абсолютных погрешностей заданы).

Компетенции. ОК 01, ОК 10; У3, З1.

Ответ. $a \cdot b \approx 5{,}3 \cdot 2{,}1 = 11{,}13$. $\Delta(a \cdot b) \approx |b| \cdot \Delta a + |a| \cdot \Delta b = 2{,}1 \cdot 0{,}05 + 5{,}3 \cdot 0{,}02 = 0{,}105 + 0{,}106 = 0{,}211$. Относительная погрешность $\delta \approx 0{,}211/11{,}13 \approx 0{,}0190$ (1,90%).

2.2 Округлите число 0,74652 с точностью до 0,001. Определите число верных цифр в полученном приближении.

Компетенции. ОК 02, ПК 5.1; З1.

Ответ. 0,747. Абсолютная погрешность округления |0,74652–0,747| = 0,00048 < 0,0005, поэтому все три десятичных знака верны в строгом смысле. Верные цифры: 7,4,7.

2.3 Уточните корень уравнения x·cos(x)–0,3=0 на отрезке [1,0; 1,5] методом половинного деления. Сделайте один шаг. Вычислите новую границу отрезка.

Компетенции. ОК 04, ПК 1.1; У1, З2.

Ответ. f(1)=1·cos1–0,3≈0,5403–0,3=0,2403 (>0); f(1,5)=1,5·cos1,5–0,3≈1,5·0,0707–0,3=0,106–0,3= –0,194 (<0). Середина c=(1+1,5)/2=1,25.

f(1,25)=1,25·cos1,25–0,3≈1,25·0,3153–0,3=0,394–0,3=0,094 (>0). Новый отрезок [1,25; 1,5].

2.4 Для системы

{10x1+x2=11,x1+10x2=11,{10x1+x2=11,x1+10x2=11,

выполните одну итерацию метода Якоби (простой итерации), взяв начальное приближение (0,0).

Компетенции. ОК 01, ПК 1.2; У1, З2.

Ответ. $x_1^{(1)} = (11 - x_2^{(0)})/10 = 11/10 = 1,1$; $x_2^{(1)} = (11 - x_1^{(0)})/10 = 1,1$. Результат: (1,1; 1,1).

2.5 Вычислите приближённое значение интеграла ∫01x2dx∫01x2dx по формуле трапеций, разбив отрезок [0,1] на 2 равные части (шаг h=0,5). Найдите истинную погрешность.

Компетенции. ОК 09, ПК 3.4; У1, З2.

Ответ. Узлы: 0; 0,5; 1. f(0)=0; f(0,5)=0,25; f(1)=1. Формула трапеций: $h\cdot(f_0/2 + f_1 + f_2/2)$ = 0,5·(0/2 + 0,25 + 1/2) = 0,5·(0 + 0,25 + 0,5)=0,5·0,75=0,375. Точное значение 1/3 ≈ 0,33333. Погрешность = 0,375 – 0,33333 = 0,04167.

2.6 Используя интерполяционную формулу Ньютона для равноотстоящих узлов, вычислите значение функции в точке x=2,5 по таблице:

x | 2 | 3 | 4

y | 5 | 9 | 15

(шаг h=1, конечные разности Δy, $\Delta^2 y$).

Компетенции. ОК 02, ПК 9.2; У4, З2.

Ответ. Таблица разностей:

x=2, y=5; Δy_0=9-5=4; Δy_1=15-9=6; $\Delta^2 y_0$=6-4=2.

Первая формула Ньютона для x_0=2: $t=(x-x_0)/h$ = 0,5.

y(2,5)=5 + t·4 + t(t-1)/2·2 = 5 + 0,5·4 + 0,5·(-0,5)/2·2 = 5 + 2 + (-0,25)·2 = 5+2-0,5=6,5.

2.7 Решите задачу Коши y' = x + y, y(0)=1 на отрезке [0;0,2] методом Эйлера с шагом h=0,1. Найдите y(0,2).

Компетенции. ОК 01, ПК 1.5; У1, З2.

Ответ.

x_0=0, y_0=1.

На первом шаге: $y_1 = y_0 + h\cdot(x_0+y_0)$ = 1 + 0,1·(0+1)=1,1; x_1=0,1.

На втором: y_2 = 1,1 + 0,1·(0,1+1,1)=1,1 + 0,1·1,2=1,1+0,12=1,22. Ответ: y(0,2)≈1,22.

2.8 Функция задана таблицей:

x | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4

y | 1,105 | 1,221 | 1,350 | 1,491

Постройте интерполяционный многочлен Лагранжа третьей степени (записать в общем виде, коэффициенты не вычислять).

Компетенции. ОК 05, ПК 10.1; У2.

Ответ.

L3(x)=1,105(x−0,2)(x−0,3)(x−0,4)(0,1−0,2)(0,1−0,3)(0,1−0,4)+1,221(x−0,1)(x−0,3)(x−0,4)(0,2−0,1)(0,2−0,3)(0,2−0,4)+...*L*3(*x*)=1,105(0,1−0,2)(0,1−0,3)(0,1−0,4)(*x*−0,2)(*x*−0,3)(*x*−0,4)+1,221(0,2−0,1)(0,2−0,3)(0,2−0,4)(*x*−0,1)(*x*−0,3)(*x*−0,4)+...

(полное выражение с четырьмя слагаемыми)

2.9 Найдите значение определённого интеграла ∫0,20,8sin⁡x dx∫0,20,8sin*xdx* по формуле Симпсона с шагом h=0,2 (три узла – границы и середина).

Компетенции. ОК 09, ПК 1.2; У1.

Ответ. Узлы: a=0,2; c=0,5; b=0,8. f(0,2)≈0,19867; f(0,5)=0,47943; f(0,8)≈0,71736.

Формула Симпсона: (b-a)/6·(f(a)+4f(c)+f(b)) = (0,6)/6·(0,19867+4·0,47943+0,71736)=0,1·(0,19867+1,91772+0,71736)=0,1·2,83375=0,283375.

2.10 Для уравнения x·ln x – 1 = 0 проверьте выполнение условия сходимости метода простой итерации, если его привести к виду x = φ(x) = 1/ln x, в окрестности корня (около 1,8). Оцените |φ'(x)|.

Компетенции. ОК 02, ПК 11.1; У2, З2.

Ответ. φ'(x) = –1/(x·(ln x)^2). При x=1,8: ln1,8≈0,5878; φ'(1,8)= –1/(1,8·0,3455)= –1/0,6219≈ –1,608. |φ'|>1, условие сходимости не выполнено (метод расходится).

2.11 Выполните один шаг метода Зейделя для системы

{4x1−x2=3,−x1+4x2=5,{4*x*1−*x*2=3,−*x*1+4*x*2=5,

начиная с (0,0).

Компетенции. ОК 04, ПК 1.1; У1.

Ответ. $x_1^{(1)}$ = (3 + $x_2^{(0)}$)/4 = 3/4 = 0,75.

$x_2^{(1)}$ = (5 + $x_1^{(1)}$)/4 = (5+0,75)/4 = 5,75/4 = 1,4375. Результат (0,75; 1,4375).

2.12 Измерения дали значения: 12,3; 12,5; 12,4; 12,4; 12,6. Найдите среднее арифметическое и его абсолютную погрешность как полуразмах (max-min)/2.

Компетенции. ОК 10, ПК 5.1; У3, З1.

Ответ. Среднее = (12,3+12,5+12,4+12,4+12,6)/5 = 62,2/5=12,44.

Размах = 12,6–12,3=0,3; абсолютная погрешность = 0,3/2=0,15. Ответ: 12,44 ± 0,15.

2.13 Постройте кубический сплайн для функции, заданной двумя точками (0,1) и (1,2). Запишите уравнение сплайна на отрезке [0,1] в виде S(x)=ax^3+bx^2+cx+d, используя условия непрерывности первой и второй производных (граничные условия – нулевая кривизна на концах). Найдите коэффициенты.

Компетенции. ОК 09, ПК 9.2; У4, З2.

Ответ. Для двух точек сплайн – отрезок прямой, но по условию кубический сплайн вырождается в линейную функцию. Из условий: S(0)=1, S(1)=2, S''(0)=0, S''(1)=0. Решение: S''(x)=0 ⇒ S(x)=Ax+B. Подстановка: B=1, A+1=2 ⇒ A=1. Ответ: S(x)=x+1.

2.14 Вычислите приближённое значение интеграла ∫01e−x2dx∫01*e*−*x*2*dx* по составной формуле прямоугольников (средних) с шагом h=0,5.

Компетенции. ОК 01, ПК 3.4; У1.

Ответ. Разбиение на два подотрезка: [0;0,5] и [0,5;1]; точки в серединах: x_1=0,25, x_2=0,75. f(0,25)=e^{-0,0625}≈0,9394; f(0,75)=e^{-0,5625}≈0,5698. Приближение = h·(f(0,25)+f(0,75)) = 0,5·(0,9394+0,5698)=0,5·1,5092=0,7546.

2.15 Найдите минимум функции f(x)=x^2–4x+5 на отрезке [0,3] с точностью ε=0,5 методом золотого сечения. Выполните одну итерацию (укажите новый интервал).

Компетенции. ОК 02, ПК 1.5; У2.

Ответ. τ = (√5–1)/2 ≈ 0,618. Длина L=3. Вычисляем x_1 = b – τ·L = 3 – 0,618·3 = 3 – 1,854 = 1,146; x_2 = a + τ·L = 0 + 1,854 = 1,854. f(x_1)=$1{,}146^2$–4·1,146+5≈1,313–4,584+5=1,729; f(x_2)=3,438–7,416+5=1,022. f(x_2) < f(x_1) ⇒ новый интервал [x_1; b] = [1,146; 3].

Уровень 3.

3.1 Разработайте алгоритм (словесно или в виде блок-схемы) решения нелинейного уравнения f(x)=0 методом Ньютона (касательных). Укажите критерий остановки.

Компетенции. ОК 01, ПК 1.1, ПК 1.2; У4, З2.

Ответ. Алгоритм:

1. Задать начальное приближение x_0, точность ε.
2. Для k=0,1,2,…

Вычислить f(x_k) и f'(x_k).
Если |f(x_k)| < ε, то корень = x_k, останов.
Иначе x_{k+1} = x_k – f(x_k)/f'(x_k).
Если |x_{k+1} – x_k| < ε, останов.
Конец.

3.2 Вычислите интеграл ∫01dx1+x2∫011+*x*2*dx* методом Симпсона с шагом h=0,25 (n=4) и оцените погрешность по правилу Рунге (сравните с результатом при h=0,5). Точное значение π/4 ≈ 0,785398.

Компетенции. ОК 02, ПК 3.4; У1, У3.

Ответ. h=0,25: узлы 0;0,25;0,5;0,75;1. f(0)=1; f(0,25)=1/(1+0,0625)=0,941176; f(0,5)=0,8; f(0,75)=1/(1+0,5625)=0,64; f(1)=0,5.

I_h = (0,25/3)·[1 + 4·(0,941176+0,64) + 2·0,8 + 0,5] = (0,08333)·[1 + 4·1,581176 + 1,6 + 0,5] = 0,08333·[1 + 6,3247 + 1,6 + 0,5] = 0,08333·9,4247 = 0,78539.

Для h=0,5: узлы 0;0,5;1; I_{2h}=(0,5/3)·[1+4·0,8+0,5]=0,16667·[1+3,2+0,5]=0,16667·4,7=0,78333.

Погрешность по Рунге: R = (I_h – I_{2h})/(2^4 – 1) = (0,78539–0,78333)/15 = 0,00206/15 ≈ 0,000137. Истинная погрешность ≈ 0,000008.

3.3 Решите систему линейных уравнений

{10x1–x2+2x3=6,–x1+11x2–x3+3x4=25,2x1–x2+10x3–x4=–11,3x2–x3+8x4=15,

$$\begin{cases} 10x1-x2+2x3=6, -x1+11x2-x3+3x4=25, 2x1-x2+10x3-x4=-11, 3x2-x3+8x4=15, \end{cases}$$

методом Гаусса (привести к треугольному виду, выполнить обратный ход). Требуется найти все неизвестные с точностью до 0,01.

Компетенции. ОК 04, ПК 1.5; У1, З2.

Ответ. (Приведено сокращённое решение)

Прямой ход: после исключений получаем систему

{10x1–x2+2x3=6,10,9x2–0,8x3+3x4=25,6,9,927x3+0,367x4=–9,927,7,96x4=7,96.

$$\begin{cases} 10x1-x2+2x3=6, 10{,}9x2-0{,}8x3+3x4=25{,}6, 9{,}927x3+0{,}367x4=-9{,}927, 7{,}96x4=7{,}96. \end{cases}$$

Обратный ход: $x_4 = 1$; $x_3 = (-9{,}927 - 0{,}367\cdot 1)/9{,}927 = -1$; $x_2 = (25{,}6 + 0{,}8\cdot(-1) - 3\cdot 1)/10{,}9 = (25{,}6 - 0{,}8 - 3)/10{,}9 = 21{,}8/10{,}9 = 2$; $x_1 = (6 + 2 - 2\cdot(-1))/10 = (6+2+2)/10 = 1$. Ответ: (1; 2; –1; 1).

3.4 Составьте программу (на псевдокоде или Python) для вычисления определённого интеграла методом трапеций с автоматическим выбором шага (удвоением числа разбиений до достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-6}$). Функция f(x) задаётся отдельно.

Компетенции. ОК 09, ПК 1.2, ПК 9.2; У4.

Ответ.

```
python
def trapezoid(f, a, b, eps):
    n = 1
    I_prev = (b-a)*(f(a)+f(b))/2
    while True:
        n *= 2
        h = (b-a)/n
        s = (f(a)+f(b))/2
        for i in range(1, n):
            s += f(a + i*h)
        I = h * s
        if abs(I - I_prev) < eps:
            return I
        I_prev = I
```

3.5 Для задачи Коши y' = 2x – y, y(0)=1 найдите приближённое значение y(0,4) методом Рунге-Кутта 4-го порядка с шагом h=0,2. Сравните с точным решением y(x)=2x–2+3e^{-x}.

Компетенции. ОК 01, ПК 1.1; У1, З2.

Ответ. Точное решение: y(0,4)=0,8–2+3e^{-0,4}= –1,2+3·0,67032= –1,2+2,01096=0,81096.

Метод Рунге-Кутта:

Шаг 1 ($x_0=0$, $y_0=1$):

k1 = 2·0 – 1 = –1; k2 = 2·0,1 – (1+0,1·(–1)) = 0,2 – 0,9 = –0,7;

k3 = 2·0,1 – (1+0,1·(–0,7)) = 0,2 – 0,93 = –0,73;

k4 = 2·0,2 – (1+0,2·(–0,73)) = 0,4 – (1 – 0,146) = 0,4 – 0,854 = –0,454.

y_1 = 1 + (0,2/6)·(–1 + 2·(–0,7) + 2·(–0,73) + (–0,454)) = 1 + 0,03333·(–1 –1,4

–1,46 –0,454) = 1 + 0,03333·(–4,314)= 1 – 0,1438 = 0,8562.

Шаг 2 (x_1=0,2, y_1=0,8562): аналогично получаем y_2≈0,8109. Погрешность ~0,00005.

3.6 Постройте интерполяционный многочлен Ньютона для неравноотстоящих узлов:

x | 0 | 2 | 3 | 5

y | 1 | 3 | 2 | 5

Используя разделённые разности, вычислите y(4).

Компетенции. ОК 02, ПК 10.1; У2, З2.

Ответ. Разделённые разности:

$f[x_0,x_1]$ = (3–1)/(2–0)=1; $f[x_1,x_2]$=(2–3)/(3–2)= –1; $f[x_2,x_3]$=(5–2)/(5–3)=1,5.

$f[x_0,x_1,x_2]$ = (–1–1)/(3–0)= –2/3 ≈ –0,6667; $f[x_1,x_2,x_3]$ = (1,5–(–1))/(5–2)=2,5/3≈0,83333.

$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ = (0,83333–(–0,6667))/(5–0)=1,5/5=0,3.

Многочлен: P(x)=1 + 1·(x–0) + (–0,6667)(x–0)(x–2) + 0,3·(x–0)(x–2)(x–3).

Подстановка x=4: P(4)=1+4 + (–0,6667)·4·2 + 0,3·4·2·1 = 5 –5,3336 + 2,4 = 2,0664 ≈ 2,07.

3.7 Дана функция $y = x^3 – 2x^2 – 5x + 6$. Найдите все её корни на интервале [–3, 4] с точностью 10^{-5}, комбинируя метод половинного деления и метод Ньютона. Опишите стратегию выбора начального приближения.

Компетенции. ОК 05, ПК 1.5; У2, У4.

Ответ. Многочлен имеет три корня: x_1= –2, x_2=1, x_3=3. Стратегия:

1. Отделить корни, построив таблицу знаков на интервалах [–3,–1], [0,2], [2,4].
2. Для каждого отрезка выполнить несколько итераций методом половинного деления для гарантированного сужения (например, до длины <0,1).
3. Затем применить метод Ньютона ($f'(x)=3x^2–4x–5$), взяв в качестве начального приближения середину полученного малого отрезка.
4. Критерий остановки: |f(x_k)|<10^{-5} и |x_{k+1} – x_k|<10^{-5}.

3.8 Вычислите интеграл ∫02exsinxdx∫02exsinxdx методом Гаусса с двумя узлами (квадратура Гаусса–Лежандра) на отрезке [–1,1] после приведения. Найдите абсолютную погрешность по сравнению с точным значением.

Компетенции. ОК 09, ПК 3.4; У1, У3.

Ответ. Приведение к отрезку [–1,1]: t = x–1, x= t+1, dx=dt, пределы –1..1.

Подынтегральная функция f(t)=e^{t+1}·sin(t+1).

Узлы и веса для n=2: t_1= –1/√3≈ –0,57735, t_2=0,57735; A_1=A_2=1.

I ≈ 1·f(t_1)+1·f(t_2) = e^{0,42265}·sin(0,42265) + e^{1,57735}·sin(1,57735).

e^{0,42265}≈1,526; sin(0,42265)≈0,4105 → произведение≈0,626;

e^{1,57735}≈4,842; sin(1,57735)≈0,9999 → 4,842. Сумма ≈5,468.

Точное значение (интегрированием по частям): ∫exsinxdx=ex(sinx–cosx)/2∫exsinxdx=ex(sinx–cosx)/2. От 0 до 2: [e^2(sin2–cos2)/2] – [e^0(sin0–cos0)/2] = [7,389·(0,9093+0,4161)/2] – [(–1)/2] = [7,389·1,3254]/2 + 0,5 = (9,796)/2 +0,5 = 4,898+0,5=5,398.

Погрешность ≈ 5,468 – 5,398 = 0,07.

3.9 Для функции $f(x)=\sin(x)$ на отрезке $[0, \pi/2]$ найдите приближённое значение определённого интеграла методом Монте-Карло (N=1000 случайных точек). Опишите алгоритм и вычислите оценку интеграла, а также её среднеквадратичную погрешность (теоретическую).

Компетенции. ОК 02, ПК 11.1; У4, З1.

Ответ. Алгоритм:

1. Генерируем N=1000 равномерно распределённых точек $x\_i \in [0, \pi/2]$.
2. Вычисляем $f(x\_i)=\sin(x\_i)$.
3. Оценка интеграла $I \approx (\pi/2)\cdot(1/N)\cdot\sum\sin(x\_i)$.

Пусть среднее значение $\sin \approx 2/\pi \approx 0{,}6366$ (аналитически), тогда $I \approx (\pi/2)\cdot 0{,}6366 = 1{,}5708\cdot 0{,}6366 \approx 1{,}000$.

Дисперсия оценки: $D(I)\approx((\pi/2)^2\cdot D(\sin))/N$; $D(\sin)\approx 0{,}079$ (вычисляется). СКО ≈ 0,028. Таким образом, $I = 1{,}000 \pm 0{,}028$ (с вероятностью 68%).

3.10 Решите краевую задачу для ОДУ $y'' = -y$, $y(0)=0$, $y(\pi/2)=1$ методом конечных разностей с шагом $h=\pi/6$ (три внутренних узла). Запишите систему уравнений и найдите приближённое решение в узлах. Сравните с точным $y(x)=\sin x$.

Компетенции. ОК 01, ПК 1.2; У1, З2.

Ответ. Шаг $h=\pi/6\approx 0{,}5236$. Узлы: $x_0=0$, $x_1=0{,}5236$, $x_2=1{,}0472$, $x_3=1{,}5708$.

Аппроксимация: $y''\approx(y\_\{i-1\}-2y\_i+y\_\{i+1\})/h^2 = -y\_i$.

Для i=1: $(y_0-2y_1+y_2)/h^2 = -y_1$, т.е. $y_0-2y_1+y_2 = -h^2y_1 \Rightarrow y_0 - (2-h^2)y_1 + y_2 =0$.

Для i=2: $(y_1-2y_2+y_3)/h^2 = -y_2 \Rightarrow y_1 - (2-h^2)y_2 + y_3 =0$.

Граничные $y_0=0$, $y_3=1$. Подстановка:

$-(2-0{,}2742)y_1 + y_2 =0 \Rightarrow -1{,}7258y_1 + y_2=0$;

$y_1 -1{,}7258y_2 +1=0 \Rightarrow y_1 -1{,}7258y_2 = -1$.

Решение: $y_1\approx 0{,}496$, $y_2\approx 0{,}856$. Точные значения $\sin(0{,}5236)=0{,}5$; $\sin(1{,}0472)=0{,}866$. Погрешность ~0,004–0,01.

3.11 Дана таблица экспериментальных данных:

x | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0

y | 2,1 | 2,7 | 3,0 | 2,9 | 2,5

Аппроксимируйте эти данные квадратичной функцией методом наименьших квадратов. Вычислите коэффициенты a,b,c для модели $y = a + bx + cx^2$.

Компетенции. ОК 04, ПК 5.1; У2, У4.

Ответ. Система нормальных уравнений:

$S_0\cdot a + S_1\cdot b + S_2\cdot c = T_0$;

$S_1\cdot a + S_2\cdot b + S_3\cdot c = T_1$;

$S_2\cdot a + S_3\cdot b + S_4\cdot c = T_2$,

где $S\_k = \sum x\_i\^k$, $T\_k = \sum x\_i\^k\ y\_i$.

Расчёт: n=5. $\sum x=10$; $\sum x^2=1+2{,}25+4+6{,}25+9=22{,}5$; $\sum x^3=1+3{,}375+8+15{,}625+27=55$; $\sum x^4=1+5{,}0625+16+39{,}0625+81=142{,}125$; $\sum y=13{,}2$; $\sum xy=2{,}1\cdot 1+2{,}7\cdot 1{,}5+3\cdot 2+2{,}9\cdot 2{,}5+2{,}5\cdot 3 = 2{,}1+4{,}05+6+7{,}25+7{,}5=26{,}9$;

$\sum x^2y=2{,}1\cdot 1+2{,}7\cdot 2{,}25+3\cdot 4+2{,}9\cdot 6{,}25+2{,}5\cdot 9 = 2{,}1+6{,}075+12+18{,}125+22{,}5=60{,}8$.

Система:

$5a + 10b + 22{,}5c = 13{,}2$

10a + 22,5b + 55c = 26,9

22,5a + 55b + 142,125c = 60,8

Решение (методом Гаусса): a ≈ 1,03; b ≈ 1,93; c ≈ –0,43. Модель: $y = 1{,}03 + 1{,}93x - 0{,}43x^2$.

3.12 Используя метод Эйлера с шагом h=0,1, решите дифференциальное уравнение $y' = y - t^2 + 1$, y(0)=0,5 на отрезке [0,1]. Оцените глобальную погрешность, сравнив с точным решением $y(t)= (t+1)^2 - 0{,}5e$^t. Вычислите максимальное отклонение в узлах.

Компетенции. ОК 09, ПК 1.5; У3, З2.

Ответ. Точное решение: y(0,1)=1,21–0,5·1,10517=1,21–0,5526=0,6574; y(0,2)=1,44–0,5·1,2214=1,44–0,6107=0,8293;

y(0,3)=1,69–0,5·1,3499=1,69–0,67495=1,01505; и т.д.

Метод Эйлера:

y_0=0,5

y_1=0,5+0,1·(0,5–0^2+1)=0,5+0,1·1,5=0,65 (погр. 0,0074)

y_2=0,65+0,1·(0,65–0,01+1)=0,65+0,1·1,64=0,814 (погр. 0,0153)

y_3=0,814+0,1·(0,814–0,04+1)=0,814+0,1·1,774=0,9914 (погр. 0,0236)

y_4(0,4)=0,9914+0,1·(0,9914–0,09+1)=0,9914+0,1·1,9014=1,1815 (точное 1,214 – погр.0,0325)

y_5(0,5)=1,1815+0,1·(1,1815–0,25+1)=1,1815+0,1·1,9315=1,3747 (точное 1,425 – погр.0,0503)

Максимальная погрешность в конце отрезка ~0,07 (для t=1).

3.13 Найти минимум функции $f(x)=x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ на интервале [0,3] методом золотого сечения с точностью $\varepsilon=10^{-4}$. Запишите последовательность интервалов после каждой итерации.

Компетенции. ОК 02, ПК 3.4; У2.

Ответ. Функция – это $(x-1)^4$, минимум в x=1 со значением 0.

Начальный интервал [0,3], τ=0,618.

Итерация 1: x_1=3–0,618·3=1,146; x_2=0+1,854=1,854. f(1,146)=$0{,}146^4$≈0,000455; f(1,854)=$0{,}854^4$≈0,531. Новый интервал [0;1,854].

Итерация 2: L=1,854; x_1=1,854–0,618·1,854=0,708; x_2=0+1,146 (старая точка). f(0,708)=$0{,}292^4$≈0,00727 > f(1,146). Новый интервал [0,708; 1,854].

Итерация 3: L=1,146; x_1=1,854–0,618·1,146=1,146; x_2=0,708+0,708=1,416. f(1,146)=0,000455; f(1,416)=$0{,}416^4$≈0,0300. Интервал [0,708;1,416].

Итерация 4: L=0,708; x_1=1,416–0,618·0,708=0,979; x_2=0,708+0,437=1,145. f(0,979)=$0{,}021^4$≈$1{,}94\cdot10^{-7}$; f(1,145)=$0{,}145^4$≈0,00044. Интервал [0,708;1,145] → длина 0,437.

Продолжать до длины <10^{-4}. После 10 итераций интервал сойдётся к 1.

3.14 Для вычисления определённого интеграла ∫05e−xcos xdx∫05 *e*−*x*cos*xdx* выберите подходящий численный метод, обоснуйте выбор (учитывая осцилляции и затухание). Напишите программу (на любом языке) с адаптивным разбиением для достижения точности 10^{-6}. Приведите фрагмент кода.

Компетенции. ОК 01, ПК 9.2; У4, З2.

Ответ. Метод – адаптивная квадратура Симпсона, так как он хорошо работает с гладкими, но осциллирующими функциями, если дробление производится там, где функция быстро меняется. Фрагмент на Python с рекурсией:

```python
def adaptive_simpson(f, a, b, eps, max_depth=10):
    m = (a+b)/2
    S = (b-a)/6*(f(a)+4*f(m)+f(b))
    S_left = (m-a)/6*(f(a)+4*f((a+m)/2)+f(m))
    S_right = (b-m)/6*(f(m)+4*f((m+b)/2)+f(b))
    if abs(S_left+S_right - S) < 15*eps or max_depth==0:
        return S_left+S_right
    return (adaptive_simpson(f,a,m,eps/2,max_depth-1) +
            adaptive_simpson(f,m,b,eps/2,max_depth-1))
# вызов: I = adaptive_simpson(lambda x: exp(-x)*cos(x), 0, 5, 1e-6)
```

3.15 Исследуйте влияние погрешности исходных данных на результат решения системы линейных уравнений

{0,780x+0,563y=0,217,0,913x+0,659y=0,254.{0,780*x*+0,563*y*=0,217,0,913*x*+0,659*y* =0,254.

Оцените число обусловленности матрицы (в норме L∞). Приближённое решение дано: x=1, y= –1. Определите, насколько изменится решение при изменении свободного члена на 0,001 в каждом уравнении. Сделайте вывод о корректности задачи.

Компетенции. ОК 05, ПК 11.1; У3, З1.

Ответ. Матрица A = [[0,780, 0,563], [0,913, 0,659]]. Определитель = $0{,}780 \cdot 0{,}659 – 0{,}563 \cdot 0{,}913 = 0{,}51402 – 0{,}514019 = 1 \cdot 10^{-6}$. Матрица близка к вырожденной.

Норма A∞ = max(0,780+0,563; 0,913+0,659)= max(1,343; 1,572)=1,572.

Обратная матрица A^{-1} = (1/det)·[[0,659, –0,563], [–0,913, 0,780]] ≈ 10^6·[[0,659, –0,563], [–0,913, 0,780]]. Норма $A^{-1}\infty \approx 10^6 \cdot$max(0,659+0,563; 0,913+0,780) = $10^6 \cdot 1{,}693 = 1{,}693 \cdot 10^6$.

Число обусловленности cond = $1{,}572 \cdot 1{,}693 \cdot 10^6 \approx 2{,}66 \cdot 10^6 >> 1$ – задача плохо обусловлена. Изменение свободного члена на δb=0,001 вызовет изменение решения ~ cond·||δb||/||b|| ≈ $2{,}66 \cdot 10^6 \cdot 0{,}001/0{,}471 \approx 5650$, т.е. решение может измениться на тысячи единиц. К данному приближению (1, –1) доверять нельзя.

Общие критерии для всех типов заданий

Оценка	Процент правильного выполнения	Требования к ответу
5 (отлично)	90–100%	Задание выполнено полностью, без ошибок и недочётов. Ответ логичен, оформление аккуратное, использованы корректные формулы и обозначения. Для программирования – код рабочий, эффективный, с комментариями.
4 (хорошо)	80–89%	Задание выполнено полностью, но имеются незначительные ошибки (например, описка в одном промежуточном вычислении, небольшая неточность в округлении, пропущен один несущественный шаг), которые студент может исправить после замечания.
3 (удовлетворительно)	70–79%	Задание выполнено не полностью (пропущены 1–2 логических шага) или допущены существенные ошибки, но общее понимание метода верное. Результат в целом достигнут, однако точность или обоснование оставляют желать лучшего.

Оценка	Процент правильного выполнения	Требования к ответу
2 (неудовлетворительно)	менее 70%	Задание не выполнено или выполнено неверно: принципиальные ошибки в выборе метода, грубые арифметические ошибки, отсутствие ответа или ответ не соответствует условию.

Детализированные критерии по типам заданий

1. Теоретические вопросы (уровни 1 и 2)

Оценка	Критерии
5	Дано полное, точное определение (формулировка). Приведена формула (если требуется). Указаны условия применимости, возможны примеры. Ответ самостоятельный, без наводящих вопросов.
4	Ответ в целом верный, но отсутствует один второстепенный пункт (например, не упомянуто ограничение метода) или допущена одна неточность в использовании терминов.
3	Ответ содержит основные элементы, но есть логические пробелы, нечёткие формулировки. Требуется уточнение преподавателя.
2	Ответ отсутствует, или дано неверное определение, или перепутаны ключевые понятия (например, абсолютная и относительная погрешность).

2. Вычислительные задачи (арифметика, погрешности, методы)

Оценка	Критерии
5	Выбран верный метод, все промежуточные вычисления выполнены правильно, получен точный (или с заданной

Оценка	Критерии
	точностью) ответ. Погрешность (если требуется) оценена верно. Единицы измерения указаны.
4	Ход решения верный, но допущена одна арифметическая ошибка, не искажающая смысла (например, неверно сложены два числа, но формула правильная). Ответ близок к истинному.
3	Метод выбран правильно, но в вычислениях допущены 2–3 ошибки, результат заметно отличается от ожидаемого. Либо не выполнена оценка погрешности, когда это требовалось.
2	Метод выбран неверно (например, для интегрирования использована формула прямоугольников вместо Симпсона без обоснования), или вычисления полностью ошибочны, или ответ отсутствует.

3. Разработка алгоритмов и программирование (уровень 3)

Оценка	Критерии
5	Алгоритм (или код) полностью соответствует заданию. Программа работает для всех тестовых примеров, корректно обрабатывает краевые условия, есть проверка на сходимость. Код структурирован, использованы осмысленные имена переменных, комментарии поясняют ключевые шаги.
4	Программа работает, но есть незначительные недочёты: отсутствует обработка одного краевого случая, не хватает комментариев, или код можно оптимизировать. Результат правильный.
3	Алгоритм в целом верен, но программа содержит логические ошибки, из-за которых даёт неверный результат на некоторых входных данных. Либо не реализован критерий остановки, либо не учтена точность.
2	Алгоритм неверен, программа не компилируется/не запускается, или выдаёт абсолютно неверные результаты. Отсутствует понимание метода.

4. Задачи на оценку точности и выбор оптимального метода

Оценка	Критерии

Оценка	Критерии
5	Студент обосновал выбор метода (скорость сходимости, устойчивость, сложность). Привёл расчёт погрешности (абсолютной и/или относительной). Сравнил с альтернативами.
4	Выбор метода корректен, но обоснование неполное (например, нет сравнения с другими методами). Погрешность вычислена, но возможна небольшая неточность.
3	Метод выбран, но без достаточного обоснования. Погрешность вычислена с ошибкой или не полностью.
2	Выбран метод, заведомо не подходящий для данной задачи (например, метод Гаусса для вырожденной системы без перестановки). Погрешность не оценена или оценена неверно.

Итоговая оценка за дифференцированный зачёт

Студент выполняет **не менее 3 заданий разного уровня** (выбираются преподавателем или случайно из билета).

Итоговый балл вычисляется как среднее арифметическое оценок за каждое задание с округлением до целого по правилам математики.

Пример перевода среднего балла в оценку:

Средний балл	Итоговая оценка
4,5 – 5,0	5 (отлично)
3,5 – 4,49	4 (хорошо)
2,5 – 3,49	3 (удовлетворительно)
< 2,5	2 (неудовлетворительно)

Дополнительно учитывается:

- **Повышение оценки** на 0,5 балла, если студент дал развёрнутый комментарий к каждому шагу, проявил творческий подход или предложил альтернативный метод.
- **Снижение оценки** на 0,5 балла за небрежное оформление, отсутствие единиц измерения, нечитаемый почерк (на письменном зачёте) или нарушение инструкции.

Примеры оценивания конкретных заданий

Пример 1 (задание 1.1):

Вопрос: Что такое абсолютная погрешность?

5 → «Абсолютная погрешность – модуль разности между точным значением x и его приближением a: Δ = |x – a|.»

4 → «Это разница между точным и приближённым числом, берётся по модулю» (нет явной формулы).

3 → «Погрешность показывает, насколько число неточное» (слишком размыто).

2 → Не ответил или сказал «относительная погрешность».

Пример 2 (задание 2.3 – один шаг метода половинного деления):

5 → Верно найдены значения f(a), f(b), f(c), правильно определён новый отрезок.

4 → Вычисления верны, но неправильно указан знак одного из значений (например, f(c) указан положительным, хотя следовало отрицательным) – исправлено после замечания.

3 → Найдены f(a) и f(b), но ошибка в вычислении середины или неверный выбор нового отрезка.

2 → Не выполнено ни одного шага, или использован другой метод.

Пример 3 (задание 3.4 – написать программу интегрирования):

5 → Код на Python/Pascal корректен, содержит циклы, условие остановки по точности, возвращает значение. Добавлена обработка ввода.

4 → Код работает, но нет проверки на сходимость или шаг удваивается неверно (например, h = h/2 вместо h = (b-a)/n). После указания ошибки студент исправляет.

3 → Программа содержит логическую ошибку: неверное накопление суммы, неправильный критерий остановки. Результат далёк от правильного, но структура метода узнаваема.

2 → Программа не компилируется или выдаёт 0 для любого интеграла, студент не может объяснить свой код.